Oral de mathématiques 1
session de juin 2018

Rapport de jury,
Aurélien Lascroux, Édouard Maurel-Segala

Déroulement de l'épreuve

L'oral de mathématiques 1 du concours d'entrée à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales pour la session 2018 se situe dans la continuité de celui de 2017. Il se compose de

- 30 minutes de préparation sur deux exercices : l'un de probabilités, l'autre d'algèbre
- 30 minutes d'oral où le candidat expose nécessairement, dans l'ordre de son choix, chacun de ces deux exercices ; après au plus 20 minutes consacrées à un exercice, l'examinateur demande au candidat de présenter le second.

Résultats

La moyenne des notes obtenues est de 11,9, avec un écart-type de 3,5.
Les notes s'échelonnent entre 4 et 19.

Observations d'ordre général

Le jury a eu la satisfaction d'interroger des candidats courtois, s'exprimant avec aisance, manifestement bien préparés à l'utilisation du tableau comme support à leur raisonnement développé à haute voix.
Il est à noter qu'un oral de mathématiques ne saurait être un monologue qui ne présenterait pour évaluer le candidat que peu de différences avec une épreuve écrite. Le candidat ne doit donc pas s'étonner que l'examinateur l'interrompe, le questionne, lui demande de rappeler une définition ou d'énoncer un théorème, de préciser un raisonnement etc. Cela ne doit en aucun cas être interprété par le candidat comme un signe de désapprobation de ce qu'il vient d'exposer.
Le jury a apprécié que très souvent les candidats débutent leur oral en présentant honnêtement et clairement ce qu'ils avaient su traiter et ce qui leur avait posé problème. Cela permet à l'examinateur de les orienter au mieux pour voir s'ils parviennent avec une aide supplémentaire à résoudre les questions qui leur ont posé problème. Il n'est pas nécessaire pour avoir une bonne note d'avoir su traiter pendant la préparation les deux exercices dans leur totalité. Être capable de s'en sortir avec l'aide de quelques indications supplémentaires de l'examinateur est une qualité essentielle.
Il est particulièrement apprécié qu'un candidat sache adopter un regard critique sur ses résultats, seul ou avec l'aide de l'examinateur (par exemple, la valeur de l'espérance obtenue par le calcul est-elle conforme à notre intuition ?). Ainsi, le jury préfère l'attitude d'un candidat admettant n'avoir établi qu'une inclusion sur les deux souhaitées et s'interrogeant au sujet de la seconde plutôt que celle d'un candidat affirmant sans justification l'égalité des deux ensembles.

Observations relatives au contenu mathématique des oraux

Le jury a observé, comme à la session 2017, une **distorsion fréquente entre les compétences des candidats en probabilités et en algèbre linéaire** : alors que les principaux résultats du cours de probabilités (formule des probabilités totales, lois usuelles, propriétés de l'espérance et de la variance…) sont dans l'ensemble bien connus, les compétences élémentaires du cours d'algèbre (déterminer si une matrice carrée d'ordre 2 est inversible, déterminer une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation, traduire en terme de factorisation le fait qu'un scalaire soit racine d'un polynôme…) le sont

beaucoup moins.
Concernant la méthode, les candidats montrent dans l'ensemble de bonnes capacités à présenter des raisonnements clairs et rigoureux mais quelques candidats plus faibles commettent des erreurs de logique élémentaire comme confondre les notions de condition suffisante et nécessaire, ou s'égarent dans le raisonnement d'analyse-synthèse qu'ils proposent.

En **probabilités**, le jury a constaté une plus grande habitude de la manipulation des variables aléatoires discrètes que des variables à densité.
Des confusions apparaissent régulièrement entre ces deux domaines. Ainsi, certains candidats utilisent une identité du type $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$ pour une variable aléatoire X à densité.
Des candidats en nombre significatif semblent étonnés que l'interrogateur leur demande de tracer l'allure de la courbe d'une fonction de densité usuelle ou de la fonction de répartition qu'ils viennent de calculer. En général, ces questions sont mal traitées, plusieurs candidats, sachant pourtant effectuer quelques calculs à partir d'une densité de la loi normale centrée réduite, étant incapables de tracer l'allure de sa courbe. Des candidats tracent des courbes de fonctions de répartition ou de fonctions de densité qui semblent tendre vers l'infini.

En **algèbre**, un nombre non négligeable de candidats croit voir un lien logique entre l'inversibilité et la diagonalisabilité d'une matrice carrée.
Certains candidats ne peuvent déterminer le rang d'une matrice dont toutes les colonnes sont clairement proportionnelles et non nulles sans effectuer des opérations élémentaires sur les lignes.
Plusieurs candidats semblent ne jamais avoir vu ou entendu parler de matrices non nulles de carré nul.
Dans l'ensemble le calcul matriciel est bien maîtrisé, à tel point que certains candidats tentent de s'y ramener à tout prix, y compris dans le cas de raisonnements portant sur des endomophismes et pour lesquels le détour par une écriture matricielle n'est pas nécessaire.
Beaucoup de candidats considèrent qu'un vecteur est nécessairement un élément de $\mathbb{R}^n$. Ils travaillent dans un espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base comme s'il s'agissait nécessairement de l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique.
L'absence de vision géométrique entraîne des erreurs de raisonnement, comme celle consistant à croire qu'il suffit, pour obtenir une base d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie, d'extraire d'une base quelconque de E une famille de vecteurs judicieusement choisie.

Enfin, le jury a vivement apprécié quelques **prestations remarquables** de candidats possédant à la fois une connaissance précise des notions au programme, un savoir-faire témoignant d'une pratique régulière des mathématiques et un recul sur les concepts utilisés et sur les résultats obtenus.
Le jury y voit le signe d'une bonne adéquation entre la préparation menée par les professeurs au cours des deux années de classes préparatoires et les exigences du concours d'entrée à l'ENSAE en filière économie et sciences sociales.

Exemples de sujets posés à l'oral 2018

On trouvera ci-dessous deux sujets proposés à la session 2018.

Sujet 1

Exercice 1

Soient n un entier naturel non nul, $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer la fonction de répartition F_n de la variable $n(1 - M_n)$.
2. Discuter l'existence et la valeur de la limite $\lim_{n \to +\infty} F_n(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. Pour tout x réel, on pose
$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} F_n(x).$$
Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité, l'espérance et la variance.

Exercice 2

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, a un réel, et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par
$$f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 \quad \text{et} \quad f_a(e_2) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

1. Que dire de l'endomorphisme $f_a \circ f_a$? En déduire l'ensemble des valeurs propres de f_a.
2. L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f_a est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Sujet 2

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

1. Soient P un polnôme dans E_n et F_P l'ensemble des polynôme de E_n qui sont multiples de P (c'est à dire les polynômes Q tels qu'il existe un polynôme R tel que $Q = RP$). Montrer que F_P est un espace vectoriel dont on calculera la dimension.
2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Soient P un polynôme de degré p qui possède p racines réelles et Q un polynôme de degré q qui possède q racines réelles. On suppose que les racines de P et de Q sont distinctes.
   (a) Montrer que si $p + q = n + 1$ alors $E_n = F_P \oplus F_Q$.
   (b) En déduire qu'il existe deux polynômes U et V avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$ tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 2

Soit Y une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. On suppose que Y vérifie la propriété suivante (appelée « propriété d'absence de mémoire ») :

$$\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2, \qquad \mathbb{P}(Y \geq k) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(Y \geq k + l \mid Y \geq k) = \mathbb{P}(Y \geq l).$$

1. Trouver, pour tout entier naturel k, une relation entre les quantités $\mathbb{P}(Y \geq k + 1)$ et $\mathbb{P}(Y \geq k)$.
2. On pose $\alpha = \mathbb{P}(Y \geqslant 1)$. On suppose $\alpha \neq 0$. Calculer $\mathbb{P}(Y \geq k)$ en fonction de α. Quelle est la loi de la variable aléatoire $1 + Y$ en fonction de α ?